



Departamento de Física
FÍSICA I A - 62.01

“Determinación de la densidad de 10 arandelas y evaluación del material del cual se encuentran compuestas”

Año 2007
Primer Cuatrimestre
Curso N° 002

Grupo N° 02
30 de Marzo de 2007

Padrón	Apellido, Nombre	E-mail
88415	MUFFATTI, Lucia	muffalu@hotmail.com
88056	CIAN, Nicolás	nicolascian@hotmail.com
88494	HOOD, Pablo Cristian	hoodpablo@hotmail.com
88174	GRIMMER, Roger Ivan	roger_grrmmer@hotmail.com
88729	ARRAZUBIETA, Juan	juanarrazubieta@hotmail.com
-----	HERNANDEZ, Catalina	catalina.hs@gmail.com
88253	PLASTANI, Ignacio	supernp@hotmail.com

CORRECCIONES				APROBACION
1ra		2da		
Entrega	Devolución	Entrega	Devolución	

Resumen

El objetivo de la práctica es definir a través de distintos instrumentos la densidad de 10 arandelas y comparar luego los resultados obtenidos para decidir de que material están constituidas. Para poder realizar estas mediciones y resultados utilizamos métodos de medición directos e indirectos. Los resultados obtenidos fueron:

Densidad según mediciones hechas con regla: $(9 \pm 5) \text{ g/cm}^3$

Densidad según mediciones hechas con calibre: $(7,6 \pm 0,5) \text{ g/cm}^3$

Densidad según mediciones hechas con probeta: $(8 \pm 3) \text{ g/cm}^3$

Introducción teórica

Conocer un objeto implica poder cuantificarlo. En el mundo físico esas cuantificaciones las hacemos a través de mediciones.

Medir es comparar un objeto desconocido frente a un patrón conocido, mediante la determinación de la cantidad de veces que el patrón entra en el objeto. Estas mediciones se presentan de forma:

- Directas: las mediciones que son determinadas directamente con el instrumento de medición. Ej.: la longitud del ancho de una ventana, o el peso de una persona con la balanza
- Indirectas: son aquellas resultado de la aplicación de una fórmula, es decir aquellas donde se relacionan mediciones directas mediante expresiones matemáticas. Ej.: la presión de un gas ideal $P = RTn/V$ (P , presión. R , la constante universal de los gases, T , temperatura; n , cantidad de moles del gas; V , volumen que ocupa el gas). Este tipo de mediciones se podrían considerar directas si constamos con el instrumento adecuado. Ej.: basándonos en el ejemplo de la presión anteriormente mencionado, podríamos determinar la presión de forma “directa” con un manómetro.

Ninguna medición es exacta; es decir, siempre tiene una cierta incerteza. Por lo tanto una medición expresada correctamente sería: “valor representativo” \pm “incerteza”

La incerteza, o error absoluto (ΔX), es la consideración de todos los errores de la medición, el margen de error de la medida. Los errores se dan a partir de diferentes factores:

- Sistemáticos: se producen por una insuficiencia en el proceso de medición. Son, en su mayoría, de determinación exacta y posibles de disminuir. Ej.: mal ajuste del 0 en el instrumento.
- Casuales o Accidentales: son aquellos no determinados dentro de un límite, o intervalo. Ej.: variación de la temperatura ambiente, cansancio del observador.

Anteriormente, dijimos que las medidas físicas son expresadas por un valor representativo; éste es la magnitud determinada como significativa dentro del conjunto de mediciones hechas frente a un mismo fenómeno. El valor representativo es establecido a partir de los siguientes tres conceptos de forma totalmente arbitraria según el interés o necesidad del observador; La elección del criterio a utilizar puede variar de acuerdo a el costo que maneje el investigador, la precisión buscada, el tiempo que dispone, etc.

- Moda: el valor que más frecuentemente se repite dentro del conjunto de mediciones.
- Promedio: es la suma de cada uno de los valores obtenidos sobre la cantidad de valores.
- Valor Medio: es la semisuma del valor máximo y el valor mínimo del conjunto obtenido. $(X_{\max} + X_{\min})/2$

El Error Absoluto (ΔX) es la otra parte de la expresión de una medición, determinado como la semidiferencia del valor máximo y el mínimo. $|X_M - X_m|/2$

Otra manera de expresar el error que presenta una medición es a través del Error Relativo (ϵ_r), utilizado para determinar cuán significativo es el ΔX , y posteriormente estudiar la precisión de las medidas. También lo usamos ante la propagación de errores, (explicada posteriormente). Vale destacar que dicho error es “adimensional” (por lo tanto no tiene unidad). Reconocemos también el Error porcentual, que es la expresión porcentual del ϵ_r .

Error relativo (ϵ_r): $\Delta X/X$

Error Porcentual ($\epsilon\%$): $\epsilon_r \times 100\%$

Todo instrumento presenta cierta apreciación, es decir el rango de incerteza debido a la unidad que se utiliza. Se determina de acuerdo a la mínima medición del instrumento. Ej.: en la regla la mínima medición es en milímetros, por lo tanto la apreciación será de ± 1 mm y del calibre $\pm 0,05$ mm, ya que un milímetro está dividido en 20 partes (en el caso del instrumento utilizado; pues existen calibres "1/10").

- Cifras significativas

Para que una medida tenga sentido físico completo, necesitamos determinar las cifras significativas de nuestros valores; ya que sería absurdo, por ejemplo, determinar el valor relativo del diámetro externo medido con regla, como el promedio de los valores = 24.596, si en realidad ese "valor representativo" no es una medida que podamos tomar con la regla. Es por eso que las incertezas, en general, deben ser expresadas con una sola cifra significativa. Los valores representativos, se expresan con la misma cantidad de cifras significativas que la incerteza. Se debe tener presente que el valor representativo y su incerteza de una misma unidad, tienen que responder al mismo orden de magnitud. Ej.: 10.025 ± 0.01 (no corresponde) la expresión correcta 10.03 ± 0.01 (el valor representativo se aproxima a la cantidad de decimales del ΔX)

- Comparación de Medidas

Una medida es comparable con otra, cuando al representar la incerteza de cada una sobre una recta, éstas se intersecan.

- Precisión y exactitud

La precisión relaciona la amplitud del intervalo y la sensibilidad del instrumento; como dijimos antes, el ϵ_r se utiliza para estudiar esta precisión, ya que a mayor error relativo, es menor la precisión de mi medida, y viceversa (tenemos mayor precisión a menor ϵ_r). Mientras que la exactitud, se relaciona con la mayor coincidencia del valor representativo con las medidas experimentales.

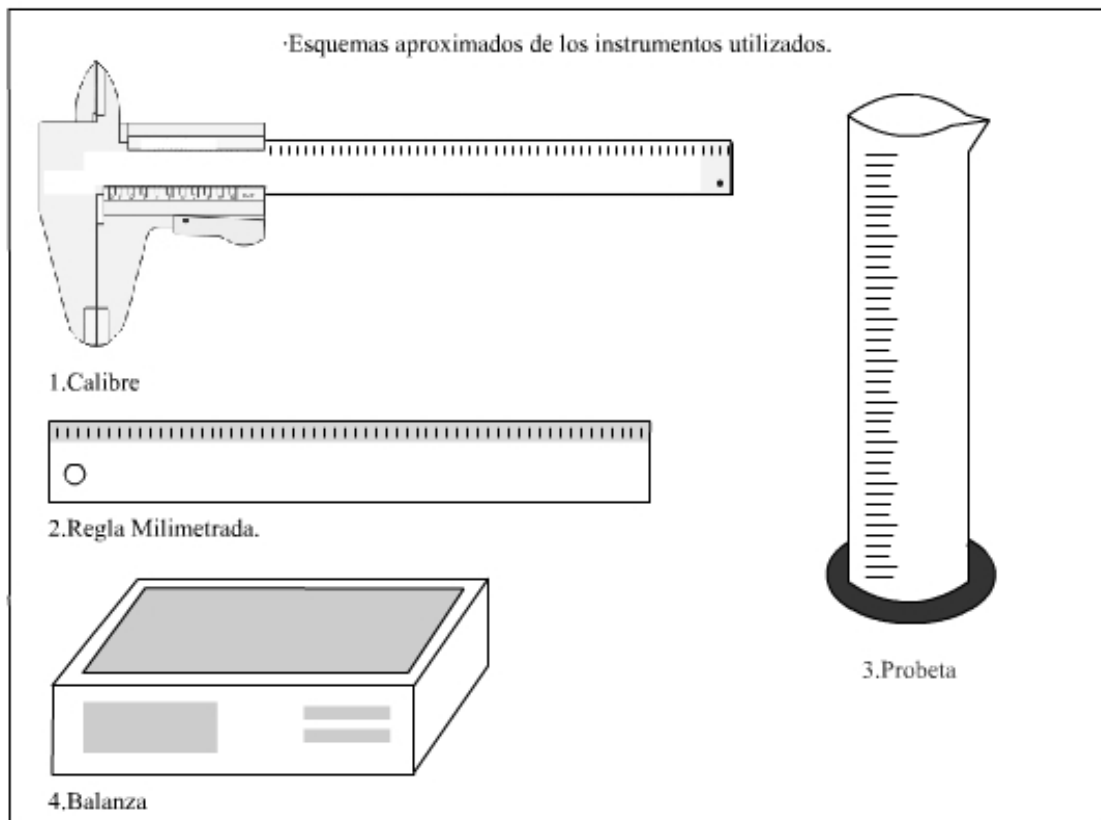
- Propagación de errores

Cuando realizamos una medición indirecta, vamos a tener errores en nuestros valores a operar según la cantidad de medidas requeridas por la fórmula. Frente a este conjunto de errores, debemos hacer una "propagación de errores", metodología que varía según la operación presente en la fórmula a desarrollar. Cuando las operaciones son suma o resta, el ΔX de la cuenta será igual a la suma de los ΔX de cada miembro. En cambio, si multiplicamos o dividimos, el ϵ_r será la suma de los ϵ_r de cada una de las medidas intervenidas.

Materiales e Instrumentos

En el trabajo de laboratorio se utilizaron los siguientes materiales e instrumentos:

1. Calibre (apreciación $\pm 1/20\text{mm}$)
2. Regla Milimetrada (apreciación $\pm 1\text{mm}$)
3. Probeta Graduada (apreciación $\pm 2\text{ml}$)
4. Balanza Electrónica (apreciación $\pm 0.5\text{g}$, pesada mínima 5g)
5. 10 Arandelas



Desarrollo

En primer lugar tomamos las diez arandelas y las numeramos para tener un registro y poder diferenciar una de otra. Cada una fue medida con la regla y el calibre por dos personas, y a su vez cada persona debía realizar dos mediciones en cada ocasión. Las mediciones realizadas fueron: Diámetro externo, diámetro interno y espesor. Los datos obtenidos se volcaron en una tabla.

Luego de terminar con las mediciones se prosiguió a pesar las diez arandelas con la balanza electrónica. Después de eso, usando la probeta de vidrio graduada, cargamos agua hasta llegar a medir 90ml (utilizando la parte inferior del menisco) y colocamos las arandelas dentro de la probeta para medir el volumen de éstas. Al registrar que el agua había “subido” hasta llegar a los 100ml (utilizando la parte inferior del menisco igualmente) pudimos decir que el volumen total de las arandelas era de $(10 \pm 4) \text{ cm}^3$.

TABLA 1
Calibre

	Diam. Ext. 1 Pers		Diam. Ext. 2 Pers		Diam. Int 1 Pers		Diam. Int 2 Pers		Espesor 1 Pers		Espesor 2 Pers	
	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
02.01	24,5 mm	24,5 mm	25,0 mm	24,5 mm	10,3 mm	10,2 mm	10,5 mm	10,2 mm	3,0 mm	2,9 mm	3,0 mm	3,0 mm
02.02	24,5 mm	24,5 mm	25,0 mm	25,0 mm	10,0 mm	10,0 mm	10,1 mm	10,1 mm	3,0 mm	3,0 mm	3,0 mm	3,0 mm
02.03	24,4 mm	24,4 mm	24,5 mm	24,5 mm	10,1 mm	10,1 mm	10,0 mm	10,0 mm	2,7 mm	2,7 mm	2,9 mm	2,9 mm
02.04	24,3 mm	24,5 mm	24,2 mm	24,2 mm	10,0 mm	10,2 mm	10,2 mm	10,0 mm	2,7 mm	2,7 mm	3,0 mm	2,9 mm
02.05	24,3 mm	24,3 mm	24,5 mm	24,6 mm	10,2 mm	10,2 mm	10,2 mm	10,2 mm	2,9 mm	2,9 mm	2,8 mm	2,6 mm
02.06	24,1 mm	24,0 mm	24,3 mm	24,5 mm	10,1 mm	10,1 mm	10,0 mm	10,0 mm	2,8 mm	2,7 mm	3,0 mm	2,9 mm
02.07	25,0 mm	24,0 mm	24,2 mm	24,3 mm	10,1 mm	10,2 mm	10,2 mm	10,2 mm	3,0 mm	3,0 mm	2,6 mm	3,0 mm
02.08	24,3 mm	24,4 mm	24,4 mm	24,3 mm	10,2 mm	10,2 mm	10,1 mm	10,2 mm	2,0 mm	2,0 mm	2,0 mm	2,3 mm
02.09	24,5 mm	24,3 mm	24,5 mm	24,5 mm	10,2 mm	10,1 mm	10,2 mm	10,2 mm	2,8 mm	2,8 mm	2,8 mm	2,8 mm
02.10	24,3 mm	24,5 mm	24,5 mm	24,5 mm	10,2 mm	10,1 mm	10,0 mm	10,0 mm	2,9 mm	2,9 mm	3,0 mm	3,0 mm

Regla

	Diam. Ext. 1 Pers		Diam. Ext. 2 Pers		Diam. Int 1 Pers		Diam. Int 2 Pers		Espesor 1 Pers		Espesor 2 Pers	
	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
02.01	24 mm	24 mm	23 mm	24 mm	10 mm	10 mm	11 mm	10 mm	2 mm	2 mm	2 mm	3 mm
02.02	24 mm	23 mm	25 mm	24 mm	11 mm	10 mm	11 mm	10 mm	2 mm	2 mm	3 mm	4 mm
02.03	24 mm	23 mm	24 mm	23 mm	10 mm	11 mm	11 mm	10 mm	2 mm	2 mm	2 mm	2 mm
02.04	24 mm	24 mm	24 mm	24 mm	11 mm	10 mm	11 mm	11 mm	2 mm	2 mm	2 mm	2 mm
02.05	24 mm	24 mm	24 mm	24 mm	11 mm	10 mm	10 mm	10 mm	2 mm	3 mm	3 mm	3 mm
02.06	24 mm	24 mm	24 mm	24 mm	9 mm	10 mm	10 mm	10 mm	2 mm	3 mm	2 mm	3 mm
02.07	24 mm	24 mm	24 mm	24 mm	10 mm	10 mm	10 mm	11 mm	2 mm	3 mm	3 mm	3 mm
02.08	24 mm	24 mm	24 mm	24 mm	11 mm	10 mm	10 mm	10 mm	3 mm	2 mm	2 mm	2 mm
02.09	24 mm	25 mm	24 mm	24 mm	11 mm	11 mm	10 mm	10 mm	3 mm	3 mm	2 mm	2 mm
02.10	24 mm	24 mm	24 mm	24 mm	11 mm	10 mm	11 mm	10 mm	2 mm	3 mm	3 mm	3 mm

Posteriormente con las cuatro mediciones de cada parte de las arandelas (diámetro interno y externo, y espesor) realizamos un promedio de los valores (los promedios fueron redondeados para ajustarlos al sistema de medidas utilizado). Calculamos luego el error absoluto de los promedios y plasmamos todo junto en la siguiente tabla (recortamos los errores absolutos a una sola cifra significativa):

TABLA 2**CALIBRE**

	Valores Representativos			Error Absoluto		
	Ext.	Int.	H.	Δx Ext.	Δx Int.	Δx H.
02.01	24,60 mm	10,30 mm	3,00 mm	0,3 mm	0,2 mm	0,05 mm
02.02	24,80 mm	10,10 mm	3,00 mm	0,3 mm	0,05 mm	0,05 mm
02.03	24,50 mm	10,10 mm	2,80 mm	0,05 mm	0,05 mm	0,10 mm
02.04	24,30 mm	10,10 mm	2,80 mm	0,2 mm	0,1 mm	0,20 mm
02.05	24,40 mm	10,20 mm	2,80 mm	0,2 mm	0,05 mm	0,20 mm
02.06	24,20 mm	10,10 mm	2,90 mm	0,3 mm	0,05 mm	0,20 mm
02.07	24,40 mm	10,20 mm	2,90 mm	0,5 mm	0,05 mm	0,20 mm
02.08	24,40 mm	10,20 mm	2,10 mm	0,05 mm	0,05 mm	0,20 mm
02.09	24,50 mm	10,20 mm	2,80 mm	0,1 mm	0,05 mm	0,05 mm
02.10	24,50 mm	10,10 mm	3,00 mm	0,1 mm	0,1 mm	0,05 mm

REGLA

	Valores Representativos			Error Absoluto		
	Ext.	Int.	H.	Δx Ext.	Δx Int.	Δx H.
02.01	24 mm	10 mm	2 mm	1 mm	1 mm	1 mm
02.02	24 mm	11 mm	3 mm	1 mm	1 mm	1 mm
02.03	24 mm	11 mm	2 mm	1 mm	1 mm	1 mm
02.04	24 mm	11 mm	2 mm	1 mm	1 mm	1 mm
02.05	24 mm	10 mm	3 mm	1 mm	1 mm	1 mm
02.06	24 mm	10 mm	3 mm	1 mm	1 mm	1 mm
02.07	24 mm	10 mm	3 mm	1 mm	1 mm	1 mm
02.08	24 mm	10 mm	2 mm	1 mm	1 mm	1 mm
02.09	24 mm	11 mm	3 mm	1 mm	1 mm	1 mm
02.10	24 mm	11 mm	3 mm	1 mm	1 mm	1 mm

A continuación calculamos el volumen de cada una de las arandelas. Para poder realizar esto tuvimos que acordar que valor de π se utilizaría en cada caso. Tomamos valores de π de tal forma que al calcular su error posteriormente lo podamos despreciar. Para ello el valor del error π tenía que ser diez veces menor que el error de todas las mediciones de la arandela.

Luego calculamos el error relativo de cada uno de estos volúmenes y propagamos los errores para el volumen.

Obtuvimos la siguiente tabla con los datos de los volúmenes y sus errores:

TABLA 3**CALIBRE**

	Volumen	ΔV	ϵ_r
02.01	1,18 cm ³	0,05 cm ³	0,04
02.02	1,21 cm ³	0,06 cm ³	0,05
02.03	1,10 cm ³	0,05 cm ³	0,05
02.04	1,1 cm ³	0,1 cm ³	0,09
02.05	1,1 cm ³	0,1 cm ³	0,09
02.06	1,1 cm ³	0,1 cm ³	0,1
02.07	1,1 cm ³	0,1 cm ³	0,1
02.08	0,81 cm ³	0,09 cm ³	0,1
02.09	1,09 cm ³	0,03 cm ³	0,03
02.10	1,17 cm ³	0,03 cm ³	0,02
TOTAL	10,9 cm ³	0,7 cm ³	0,67

Masa = (83,0 \pm 0,5) g

REGLA

	Volumen	ΔV	ϵ_r
02.01	0,7 cm ³	0,5 cm ³	0,6
02.02	1,1 cm ³	0,6 cm ³	0,5
02.03	0,7 cm ³	0,5 cm ³	0,7
02.04	0,7 cm ³	0,5 cm ³	0,7
02.05	1,1 cm ³	0,5 cm ³	0,4
02.06	1,1 cm ³	0,5 cm ³	0,4
02.07	1,1 cm ³	0,5 cm ³	0,4
02.08	0,7 cm ³	0,5 cm ³	0,6
02.09	1,1 cm ³	0,6 cm ³	0,5
02.10	1,1 cm ³	0,6 cm ³	0,5
TOTAL	9,4 cm ³	5,3 cm ³	5,3

Masa = (83,0 \pm 0,5) g

PROBETA

	Volumen	ΔV	ϵ_r
TOTAL	10 cm ³	4 cm ³	0,4

Masa = (83,0 \pm 0,5) g

Finalmente sumamos los volúmenes de cada arandela, separadamente para el calibre y la regla, para tener el volumen total de las diez arandelas. Calculamos el error absoluto del volumen total como la suma de los errores absolutos de cada arandela.

Hasta aquí tuvimos los volúmenes \pm errores absolutos para la regla y para el calibre. Además usando la probeta medimos el volumen de las 10 arandelas.

Tomando los valores del peso (que pudimos leer de la balanza electrónica), y de cada volumen planteamos la ecuación de la densidad, obteniendo el valor de la misma para cada arandela.

TABLA 4

CALIBRE

	Densidad	$\Delta\varrho$	ϵ_r
TOTAL	7,6 g/cm ³	0,5 g/cm ³	0,07

REGLA

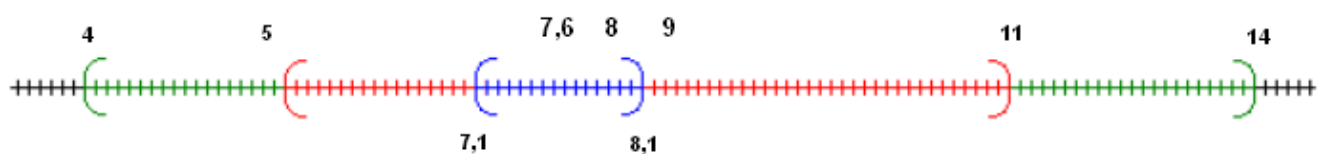
	Densidad	$\Delta\varrho$	ϵ_r
TOTAL	9 g/cm ³	5 g/cm ³	0,6

PROBETA

	Densidad	$\Delta\varrho$	ϵ_r
TOTAL	8 g/cm ³	3 g/cm ³	0,4

A continuación se puede observar sobre la recta los valores de las densidades obtenidas:

CALIBRE (7,6 ± 0,5) g/cm³
REGLA (9 ± 5) g/cm³
PROBETA (8 ± 3) g/cm³



Discusión de resultados y conclusiones

Conclusiones del desarrollo del trabajo

Así como las mediciones fueron realizadas con diferentes instrumentos, también sus valores fueron obtenidos por métodos distintos. En el caso de las mediciones de los diámetros, tanto externos como internos y el espesor, fueron medidos con regla y calibre, por lo tanto obtuvimos mediciones de tipo directa; al igual que cuando pesamos las arandelas con la balanza electrónica y tomamos el volumen con la probeta. En cambio los resultados del volumen, obtenidos con la regla y el calibre, son de tipo indirecto. Las densidades obtenidas a partir de la probeta y la balanza son de tipo directa, mientras que en el caso de las densidades derivadas del uso de la regla, el calibre y la balanza son mediciones indirectas pues los volúmenes fueron calculados matemáticamente.

Las fuentes de error más importantes fueron la poca precisión de la regla milimetrada, así como la dificultad del observador para centrar la posición cero de la misma dado el reducido tamaño de las arandelas.

Además la propagación de incertezas se hizo notar durante los cálculos.

Ante la necesidad de aumentar la precisión pensamos que una forma de reducir errores es realizar más medidas del objeto en cuestión variando su posición, para estipular potenciales deformaciones. Considerando variaciones en su forma desde su elaboración y características no notables a la vista o el tacto como la porosidad del material del cual está constituido.

Debido a la gran cantidad de arandelas a medir surgieron dificultades al desarrollar la práctica pues la forma de este objeto es muy variable por lo que se requiere realizar muchas mediciones por unidad. Al tener cuatro mediciones para su diámetro externo, cuatro para el interno y cuatro para el espesor por cada una de ellas, esto lleva a crear tablas de valores muy extensas, con lo que pueden surgir errores durante la manipulación de los datos al realizar las cuentas.

Resultados y conclusiones

Los resultados obtenidos con los diferentes instrumentos y métodos de medición, para cada arandela, fueron los siguientes:

Con **BALANZA ELEC.** (medición directa)

$$M = (83.0 \pm 0.5) \text{ g}$$

Con **CALIBRE** (medición indirecta)

$$V_{\text{TOTAL}} = (10.9 \pm 0.7) \text{ cm}^3$$

$$\delta = (7.6 \pm 0.5) \text{ g/cm}^3$$

Con **REGLA** (medición indirecta)

$$V_{\text{TOTAL}} = (9.4 \pm 5.3) \text{ cm}^3$$

$$\delta = (9 \pm 5) \text{ g/cm}^3$$

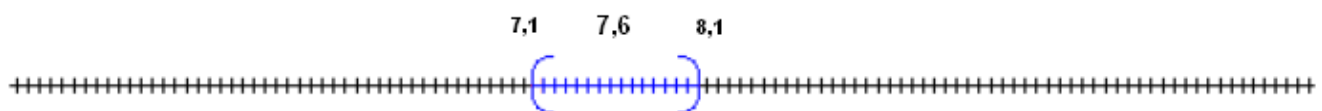
Con **PROBETA** (medición directa)

$$V_{\text{TOTAL}} = (10 \pm 4) \text{ cm}^3$$

$$\delta = (8 \pm 3) \text{ g/cm}^3$$

Gráficos de resultados e intervalos

CALIBRE $(7,6 \pm 0,5) \text{ g/cm}^3$



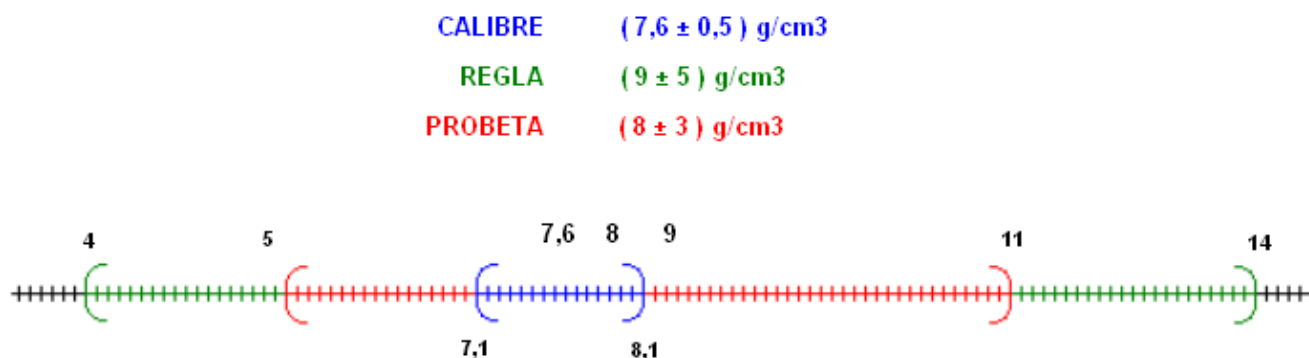
REGLA $(9 \pm 5) \text{ g/cm}^3$



PROBETA $(8 \pm 3) \text{ g/cm}^3$



Gráfico de intersección de intervalos



Al observar el gráfico, notamos que las medidas de las densidades obtenidas son comparables, ya que entre ellas su conjunto intersección no es vacío.

Deducimos que el instrumento más preciso para esta medición resultó ser el calibre, debido a que su error relativo total resulta ser menor al de los demás.

Los errores relativos de la densidad, para los instrumentos fueron los siguientes: con el calibre; obtuvimos un valor de 0.07 error relativo, con la regla; logramos un 0.6, y con la probeta fue de 0.4.

La diferencia es notoria, esto explica los valores de error absoluto adquiridos; que son: para el calibre 0.5 g/cm^3 , para la regla 5 g/cm^3 , y para la probeta 3 g/cm^3 .

Vale destacar que el hecho de obtener el menor error con el calibre nos resultó sorprendente, ya que pensábamos que calcular el volumen con la probeta sería lo más cercano a la realidad y su error el mínimo entre los instrumentos.

Observando las densidades obtenidas y comparándolas con valores de densidades para materiales conocidos (ver tabla de densidades en el apéndice), notamos que por la falta de precisión de nuestras mediciones es difícil saber el material del cual están compuestas las arandelas. Haciendo algunas aproximaciones podemos concluir que las arandelas son de níquel (8.35 g/cm^3) o latón (8.44 g/cm^3), luego tomando en cuenta el costo del níquel (U\$D 35 kg aprox.), el del latón (U\$D 2 kg aprox.) y el bajo precio que tienen las arandelas, creemos que las arandelas son de Latón (sustancia compuesta por Cobre, Plomo, Hierro, Zinc).

Sin embargo, tenemos en cuenta que de acuerdo al conocimiento común, las arandelas en su mayoría, están compuestas por acero con bajo contenido de carbono.

Apéndice 1

“Ejemplo de cálculos realizados con una de las arandelas”

Arandela N° 7:

Mediciones con calibre:

	1er persona		2da persona	
	Medida 1	Medida 2	Medida 1	Medida 2
D. externo	25,0	24,0	24,2	24,3
D. interno	10,1	10,2	10,2	10,2
Espesor	3,0	3,0	2,6	3,0

D. externo = D ; D. interno = d ; Espesor = h

Cálculo del valor representativo de las mediciones (promedio):

$$D = \frac{(25,0 + 24,0 + 24,2 + 24,3)}{4} = 24,375 \approx 24,40$$

$$d = \frac{(10,1 + 10,2 + 10,2 + 10,2)}{4} = 10,175 \approx 10,20$$

$$h = \frac{(3,0 + 3,0 + 2,6 + 3,0)}{4} = 2,90$$

Calculo de errores absolutos de las mediciones: $\Delta (X) = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{2}$

$$\Delta (D) = \frac{25,0 - 24,0}{2} = 0,5$$

$$\Delta (d) = \frac{10,2 - 10,1}{2} = 0,05$$

$$\Delta (h) = \frac{3,0 - 2,6}{2} = 0,2$$

Valores de: D,d,h en sentido físico

$$D = (24,4 \pm 0,5) \text{ mm}$$

$$d = (10,2 \pm 0,05) \text{ mm}$$

$$h = (2,9 \pm 0,2) \text{ mm}$$

Cálculo del volumen de una arandela: $V = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) h$

$$\varepsilon V = \varepsilon (\pi) + \varepsilon (4) + \varepsilon (D^2 - d^2) + \varepsilon (h)$$

El error de π y el error de 4, se desprecian por lo que $\varepsilon V = \varepsilon (D^2 - d^2) + \varepsilon (h)$

$$\begin{aligned} \varepsilon(D^2 - d^2) + \varepsilon(h) &= \frac{\Delta(D^2 - d^2)}{(D^2 - d^2)} + \frac{\Delta(h)}{h} = \frac{2\varepsilon D \cdot D^2 + 2\varepsilon d \cdot d^2}{D^2 - d^2} + \frac{\Delta(h)}{h} = \\ &= \frac{2 \frac{\Delta(D)}{D} \cdot D^2 + 2 \frac{\Delta(d)}{d} \cdot d^2}{D^2 - d^2} + \frac{\Delta(h)}{h} = \frac{2 \frac{\Delta(D)}{D} \cdot D + 2 \frac{\Delta(d)}{d} \cdot d + \frac{\Delta(h)}{h}}{D^2 - d^2} \end{aligned}$$

Reemplazando por nuestros valores:

$$\frac{2 \cdot 0,5 \cdot 24,4 + 2 \cdot 0,1 \cdot 10,2}{24,4^2 - 10,2^2} + 0,07 = \frac{26,44}{491,32} + 0,07 = 0,05 + 0,07 = 0,12$$

$$\varepsilon V = 0,12$$

$$\varepsilon V = \frac{\Delta V}{V} \quad V = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \cdot h$$

$$V = \frac{3,14(24,4^2 - 10,2^2)}{4} \cdot 2,9 \quad V \approx 1118,5 \text{ mm}^3$$

$$\Delta V = V \cdot \varepsilon V \quad \Delta V = 134,22 \text{ mm}^3$$

$$V = (1118,5 \pm 134,3) \text{ mm}^3$$

Mediciones con regla:

	1er persona		2da persona	
	Medida 1	Medida 2	Medida 1	Medida 2
D. externo	24	24	24	24
3	10	10	10	11
Espesor	2	3	3	3

D. externo = D ; D. interno = d ; Espesor = h

Cálculo del valor representativo de las mediciones (promedio o moda si se repite el valor):

$$D = \frac{(24 + 24 + 24 + 24)}{4} = 24$$

$$d = \frac{(10 + 10 + 10 + 11)}{4} = 10,25 \approx 10$$

$$h = \frac{(2 + 3 + 3 + 3)}{4} = 2,75 \approx 3$$

Calculo de errores absolutos de las mediciones: $\Delta (X) = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{2}$

$$\Delta (D) = \frac{24 - 24}{2} = 0 \rightarrow \Delta (D) = 1$$

$$\Delta (d) = \frac{11 - 10}{2} = 0,5 \rightarrow \Delta (d) = 1$$

$$\Delta (h) = \frac{3 - 2}{2} = 0,5 \rightarrow \Delta (h) = 1$$

El error absoluto de las mediciones resulta menor que la mínima división del instrumento, por lo tanto tomamos como error absoluto a la mínima división del instrumento.

Valores de: D,d,h en sentido físico

$$D = (24 \pm 1) \text{ mm}$$

$$d = (10 \pm 1) \text{ mm}$$

$$h = (3 \pm 1) \text{ mm}$$

Cálculo del volumen de una arandela: $V = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) h$

$$\varepsilon V = \varepsilon (\pi) + \varepsilon (4) + \varepsilon (D^2 - d^2) + \varepsilon (h)$$

El error de π y el error de 4, se desprecian por lo que $\varepsilon V = \varepsilon (D^2 - d^2) + \varepsilon (h)$

$$\varepsilon(D^2 - d^2) + \varepsilon(h) = \frac{\Delta(D^2 - d^2)}{(D^2 - d^2)} + \frac{\Delta(h)}{h} = \frac{2\varepsilon D \cdot D^2 + 2\varepsilon d \cdot d^2}{D^2 - d^2} + \frac{\Delta(h)}{h} =$$

$$= \frac{2 \frac{\Delta(D)}{D} \cdot D^2 + 2 \frac{\Delta(d)}{d} \cdot d^2}{D^2 - d^2} + \frac{\Delta(h)}{h} = \frac{2 \Delta(D) \cdot D + 2 \Delta(d) \cdot d}{D^2 - d^2} + \frac{\Delta(h)}{h}$$

Reemplazando por nuestros valores:

$$\frac{2 \cdot 1,24 + 2 \cdot 1,10}{24^2 - 10^2} + 0,3 = \frac{68}{476} + 0,3 = 0,14 + 0,3 = 0,44$$

$$\epsilon V = 0,44$$

$$\epsilon V = \frac{\Delta V}{V} \qquad V = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \cdot h$$

$$V = \frac{3,1(24^2 - 10^2) \cdot 3}{4} \qquad V = 1106,7 \approx 1107 \text{ mm}^3$$

$$\Delta V = V \cdot \epsilon V \qquad \Delta V = 486,9 \text{ mm}^3 \approx 487 \text{ mm}^3$$

$$V = (1107 \pm 487) \text{ mm}^3$$

Apéndice 2

“Cálculo de los errores de volumen”

A la hora de sacar el volumen de cada arandela analíticamente (medición indirecta), y ante la necesidad de calcular las incertezas del mismo se nos presenta una dificultad.

Dada la expresión del volumen: $V = (\pi / 4) \cdot (D^2 - d^2) \cdot e$

Siendo D: diámetro ext.
d: diámetro int.
e: espesor

la expresión del su error absoluto: $\Delta V = \epsilon_r V \cdot V$

ϵ_r : error relativo
V: valor representativo del vol.

Y de su error relativo: $\epsilon_r V = \epsilon_r \pi + \epsilon_r 4 + \epsilon_r (D^2 - d^2) + \epsilon_r e$

Nos preguntamos cuál es el error relativo de π ($\epsilon_r \pi$)

Entonces pretendemos $\epsilon_r \pi \ll [\epsilon_r (D^2 - d^2) + \epsilon_r e]$ o sea: $10 \cdot \epsilon_r \pi \leq [\epsilon_r (D^2 - d^2) + \epsilon_r e]$

Así podremos considerar el error relativo de π insignificante, y tomar ,

$$\epsilon_r V = \epsilon_r (D^2 - d^2) + \epsilon_r e$$

Sea π : 3,141592654

Tabla (π)

Vr π	$\Delta \pi = \pi - V_r \pi$	$\epsilon_r \pi = \Delta \pi / V_r \pi$	10. $\epsilon_r \pi$
3	0,141592654	0,042	0,42
3,1	0,041592654	0,013	0.13
3,14	0.001592654	$5,07 \cdot 10^{-4}$	0.005
3,141	0,000592654	$1,89 \cdot 10^{-4}$	0,002

Determinación de $\epsilon_r (D^2 - d^2) + \epsilon_r e$

$$\Delta (D^2 - d^2) = \Delta D^2 + \Delta d^2 \quad \text{sabemos que: } \Delta x = (x_{\max} - x_{\min})/2$$

$$\Delta (D^2 - d^2) = \epsilon_r D^2 \cdot D^2 + \epsilon_r d^2 \cdot d^2 \quad \epsilon_x = \Delta x/x$$

$$\Delta (D^2 - d^2) = 2 \epsilon_r D \cdot D^2 + 2 \epsilon_r d \cdot d^2$$

$$\Delta (D^2 - d^2) = (2 \cdot \Delta D \cdot D^2)/D + (2 \cdot \Delta d \cdot d^2)/d \quad (\text{simplificamos})$$

$$\Delta (D^2 - d^2) = 2 \cdot \Delta D \cdot D + 2 \cdot \Delta d \cdot d$$

Luego: a) $\epsilon_r (D^2 - d^2) = [\Delta (D^2 - d^2)] / (D^2 - d^2)$

b) $\epsilon_{re} = \Delta e/e$

Entonces: $\text{Cr}(D^2 - d^2) + \text{Cr } e = a + b$

Luego $10 \cdot \text{Cr } \pi \leq a + b$ (comparamos con los valores de $10 \cdot \text{Cr } \pi$ en "Tabla (π)")

Finalmente elegimos el valor de π a usar en la ecuación del volumen para cada arandela y según el instrumento.

Para calcular las diferentes incertezas y mediciones indirectas, basta remplazar los valores correspondientes de cada letra en cada ecuación, teniendo en cuenta el n° de arandela e instrumento de medición utilizado.

Ej. Arandela 02.03 Instrumento: Regla

Datos - Valores Relativos (en mm) e Incertezas Absolutas

$$D = 24 \quad d = 11 \quad e = 2 \quad \Delta D = 1 \quad \Delta d = 1 \quad \Delta e = 1$$

$$\Delta(D^2 - d^2) = 2 \cdot 1 \cdot 24 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 48 + 4 = 52$$

$$a) \text{Cr}(D^2 - d^2) = (52)/(24^2 - 2^2) = 0,2$$

$$b) \text{Cr } e = \frac{1}{2} = 0,5 \quad a + b = 0,7 = \text{Cr}(D^2 - d^2) + \text{Cr } e$$

$$10 \cdot \text{Cr } \pi \leq 0,7 \quad \text{entonces tomamos } \pi = 3$$

Vale destacar que luego de realizar esta serie de operaciones con las diez arandelas y los dos instrumentos utilizados quedaron determinados los siguientes valores de π :

_ $\pi = 3$ para los cálculos de volumen con regla.

_ $\pi = 3,14$ para los cálculos de volumen con calibre.

Apéndice 3

"Tabla de densidades"

Elementos y compuestos con densidades comprendidas entre 7 y 10

Neodimio	7.01
Zinc	7.13
Cromo	7.19
Promecio	7.30
Indio	7.31
Estaño	7.31
Samario	7.52
Manganeso	7.43
Acero	7.86
Hierro	7.87
Gadolinio	7.90
Acero	8.03
Terbio	8.23
Níquel	8,35
Latón	8,44
Disproscio	8.55
Niobio	8.57
Cadmio	8.65
Monel	8,68
Holmio	8.80
Bronce	8,86
Cobalto	8.90
Cobre	8,96
Erbio	9.07
Polonio	9.30
Tulio	9.32
Radón	9.73
Bismuto	9.75
Lutecio	9.84

Bibliografía

Baird. *Experimentación, una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*. México. Prentice Hall Iberoamericana.1991

Alonso, M y Finn, E. *Física vol.1*. México. Addison-Wesley Iberoamericana.1986.

Castiglioni-Perazzo-Rela. *Física 1*. Buenos Aires. Ed. Troquel.1981.

Sergio, Rossi. *Medición, incertidumbre y cifras significativas*.

<http://www.fi.uba.ar/materias/6201/MQmedierrcifrsig.pdf>. 2007. 21 de marzo.

Apunte para el laboratorio. Física 62.01 “*Introducción teórica.*”