



Universidad de Buenos Aires



FISICA II A (62.03)
PRÁCTICO DE LABORATORIO N° 1

Distribuciones de carga. Métodos numérico y analítico

88284	UCCELLO, Lucas	lucas.ucello@gmail.com
88056	CIAN, Nicolas	nicolas.cian@gmail.com
88382	SANDJIAN, Eugenia	euge_yineee@hotmail.com
88247	ESTOUP, Gaston	juan_estoup@hotmail.com

Resumen

El trabajo práctico consiste fundamentalmente en la resolución de dos ejercicios por dos métodos; uno numérico y otro analítico. Para su resolución numérica utilizamos el programa informático *QuickField* el cual presenta resultados de forma grafica colorida y de simple comprensión. La resolución analítica fue realizada a mano previamente utilizando la ley de Coulomb.

Introducción

Para realizar los cálculos analíticos del vector campo eléctrico utilizamos la ley de Coulomb:

La fuerza ejercida por una carga puntual sobre otra esta dirigida a lo largo de la línea que las une. La fuerza varia inversamente con el cuadrado de la distancia que separa las cargas y es proporcional al producto de las cargas. Es repulsiva si las cargas tienen el mismo signo y atractiva si las cargas tienen signos opuestos.

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} \quad (1)$$

A la hora de resolver los problemas debimos aplicar el principio de superposición:

La fuerza total aplicada a una carga debido a N cargas puntuales será la suma vectorial de las N-1 fuerzas individuales.

Definiendo al campo eléctrico como: *La fuerza ejercida por unidad de carga:*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad \text{con } q \text{ pequeña y positiva.} \quad (2)$$

Las unidades, evidentemente, son Newton sobre Coulomb. Dicho vector tiene la dirección y sentido de la fuerza.

Luego, utilizando la ley de Coulomb y el principio de superposición enunciados con anterioridad podemos definir al campo como:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3} \quad (3)$$

Dicha ecuación es válida para calcular campos eléctricos en un punto r debido a n cargas puntuales.

Asimismo, podemos modificar la ecuación y realizar ciertas consideraciones que nos permitan calcular campos eléctricos de distribuciones continuas de cargas.

De esta manera podemos suponer un diferencial de carga, de manera tal que la misma pueda ser considerada puntual; quedándonos la siguiente ecuación:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(r')(r-r')}{\|r-r'\|^3} dl' \quad (4)$$

Finalmente realizamos el cálculo de la diferencia de potencial en cada ejercicio, tomando en cuenta que definimos a este término como:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad (5)$$

Considerando que el potencial es independiente del camino, y que el campo es conservativo, podemos escribir a la diferencia de potencial como:

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}' \quad (6)$$

Para los cálculos de forma numérica, lo haremos mediante el programa informático *QuickField* el cual resuelve numéricamente la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (7)$$

La cual se deriva de una de las ecuaciones de Maxwell: la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 V = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (8)$$

Método Experimental

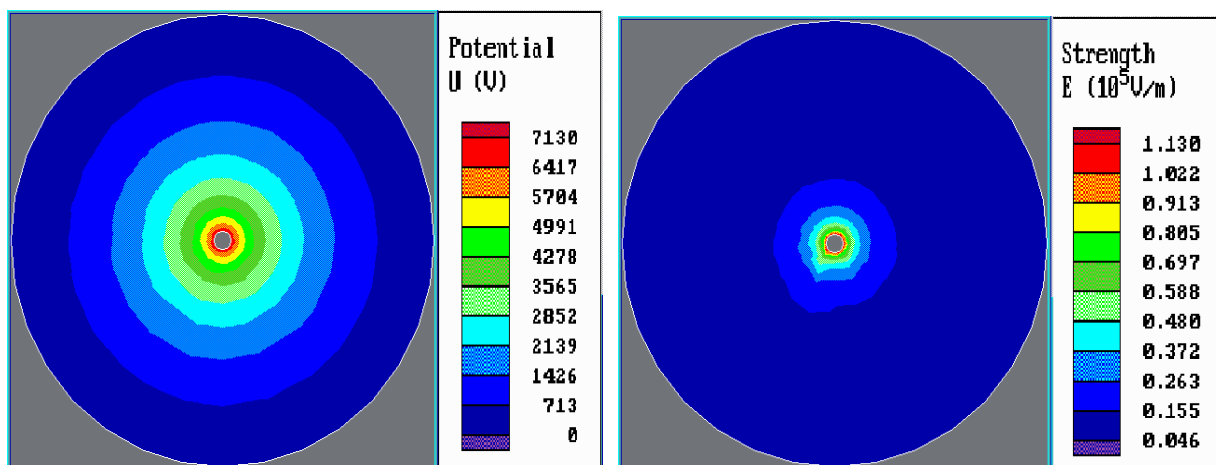
Para este trabajo práctico en el cual se calculara el campo y diferencia de potencial para distintas distribuciones de cargas, nos valemos de herramientas informáticas especialmente diseñadas para el estudio físico de las cargas: el programa *QuickField*. El mismo nos permite diseñar un problema, y pedirle que lo resuelva teniendo en cuenta consideraciones tales como condiciones de borde, condiciones iniciales, etc. Problemas que resuelve con una resolución numérica de la ecuación de Laplace.

Además de proporcionar estos datos en distintos puntos del espacio, el programa genera gráficos (como los que veremos mas adelante), donde nos muestra por ejemplo, las curvas equipotenciales, nos colorea la diferencia de potencial, y nos muestra la dirección y sentido del campo en algunos puntos discretos con lo cual podemos inferir la forma de las líneas de campo.

A continuación se detalla cada distribución de cargas junto con sus respectivos esquemas proporcionados por quikfield, así también como comentarios teóricos al respecto.

CILINDRO

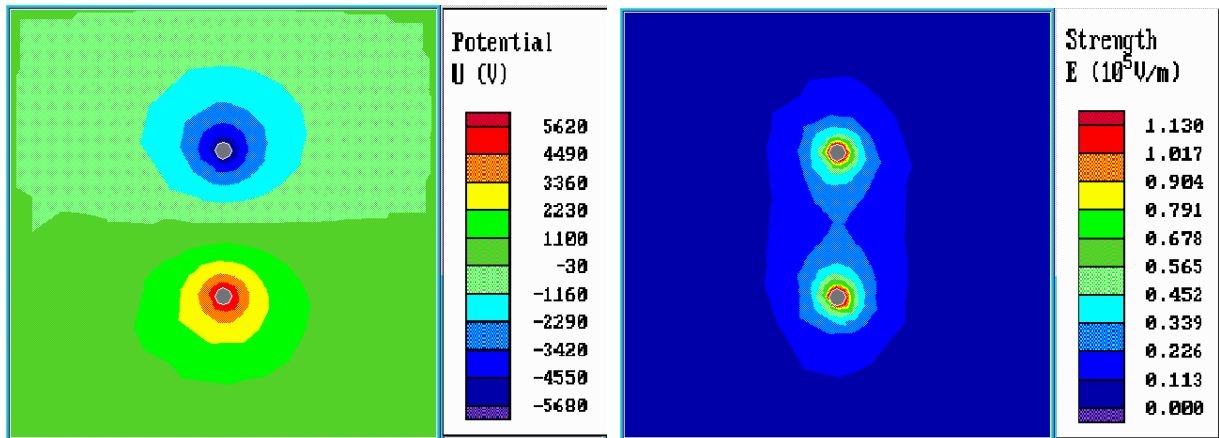
1) Una distribución cilíndrica de carga, denominada cilindro , cargada sólo sobre la superficie. El radio de la distribución es de 2cm y la carga está dada por $\sigma=1 \mu\text{C}/\text{m}^2$



Vemos en el esquema que las curvas equipotenciales forman circunferencias concéntricas con el cilindro cargado, el campo tienen dirección radial y sentido saliente al cilindro. Podemos observar también que la diferencia de potencial es mayor en las cercanías del cilindro, y a medida que nos alejamos en cualquier dirección va disminuyendo, lo cual es bastante lógico, ya que, habíamos definido al campo como: $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

DISTRIBU

2) Una distribución formada por dos distribuciones cilíndricas superficiales de carga de distinto signo separadas una cierta distancia, denominada distribu . La separación entre las mismas es de 34cm, el radio de cada distribución cilíndrica es de 2cm y la densidad de cargas superficiales $\sigma = \pm 1 \mu\text{C}/\text{m}^2$

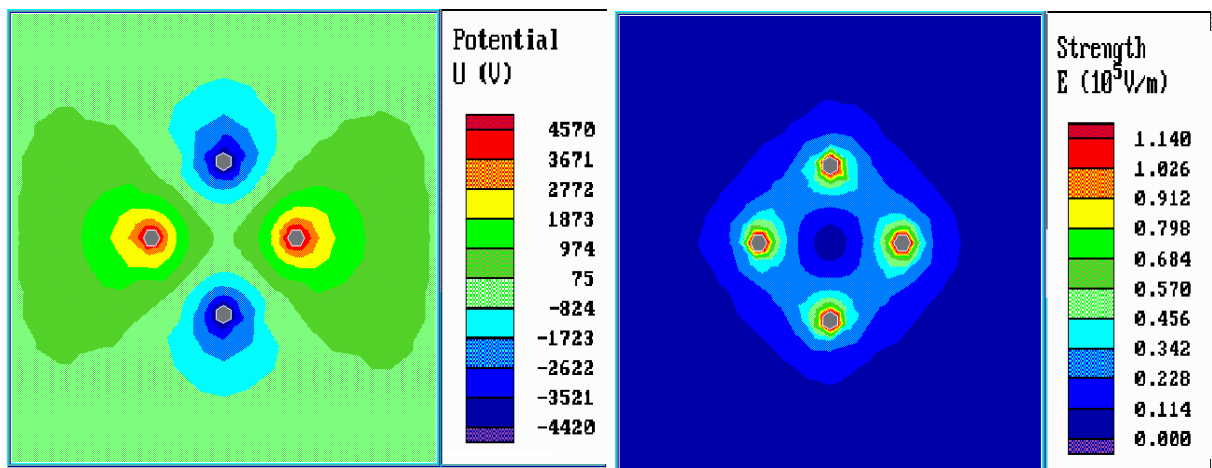


En este gráfico vemos como las curvas equipotenciales siguen siendo concéntricas en las cargas, pero en este caso de forma elíptica debido a la presencia de la otra carga.

Las líneas de campo se alejan de la carga positiva donde la diferencia de potencial es mayor y se dirigen a la carga negativa donde el potencial es menor. Dichas líneas de campo, tienen dirección perpendicular y saliente al cilindro cargado positivamente y se dirigen hacia el cilindro de carga negativa apuntando también de forma perpendicular a su superficie.

CUADRI

3) Cuatro distribuciones lineales de carga (dos positivas y dos negativas), denominada cuadri .



En este gráfico cualitativo vemos que las líneas equipotenciales se acomodan en el medio de las cuatro cargas. Podemos deducir de ello que el campo se anula en el medio de dos cargas opuestas y en el centro de las cuatro cargas.

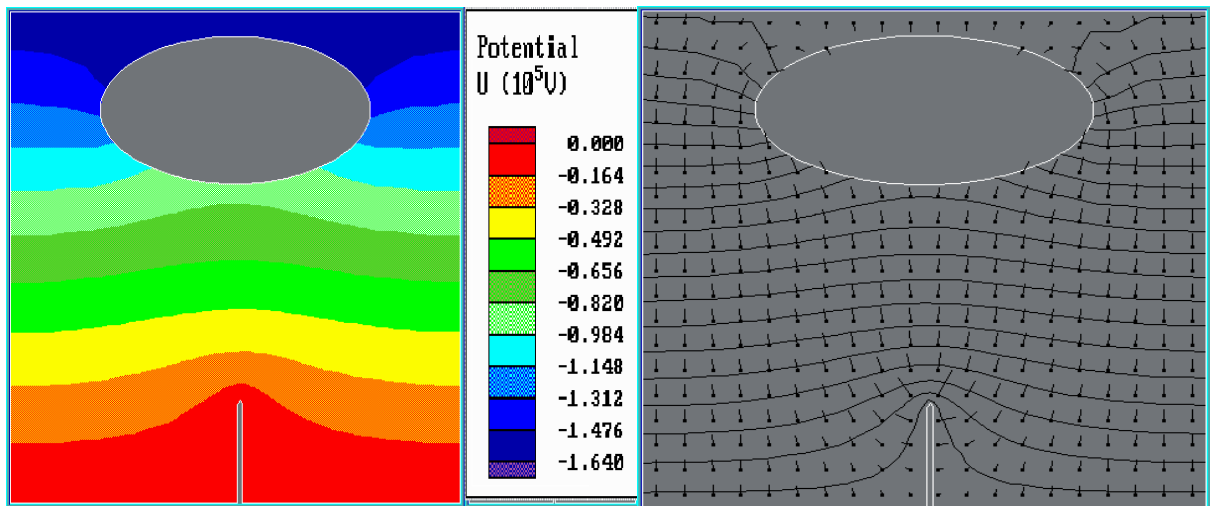
Además al igual que en el ejemplo anterior, las líneas de campo son salientes a las superficies con carga positiva y entrantes de forma perpendicular a las de

carga negativa.

El potencial varía con mayor rapidez en el entorno que rodea las cuatro distribuciones, disminuyendo más lentamente a medida que nos alejamos de las superficies cargadas.

RAYO

4) Una nube cargada y un pararrayos, denominada rayo .



Se ve que el pararrayos modifica las curvas equipotenciales ofreciendo seguridad en las zonas cercanas a el, donde el valor del campo se hace cero.

Vemos tambien que las líneas de campo son salientes desde el para rayos, dirigiéndose a la nube cargada.

Resultados

Los cálculos con el Método Analítico fueron realizados en anticipación a este trabajo práctico, los resultado con el Método Numérico fueron obtenidos por el programa *QuickField*.

Las siguientes tablas muestran los resultados para las dos primeras distribuciones de cargas, cilindro y distribu .

Campo y Potencial de "cilindro"				
	Método Analítico		Método Numérico	
	U [V]	E [V/m]	U [V]	E [V/m]
A	3637,2	22599	3559,7	22191
B	1154,4	7533	1150,8	7135,7
C	1154,3	7533	1144,8	7519,6
D	504,3	5650	480,7	5449
E	45,1	4612	45,3	4772,9

Tabla 1: Campo y Potencial de cilindro

Campo y Potencial de "distribu"				
	Método Analítico		Método Numérico	
	U [V]	E [V/m]	U [V]	E [V/m]
A	1534	9739	1071,9	8367,1
B	447,8	15760	348,69	12673
C	-737,9	6658	-433,2	4687,3
D1	-4287,2	32015	-3534,4	33452
D2	614,4	3659	202,9	2363,2
E	0	26587	-18,5	22851

Tabla 2: Campo y Potencial de distribu

Discusión

Estableceremos primero el criterio de equivalencias de mediciones. La compatibilidad de las mediciones de una magnitud hechas por distintos métodos (x_1 , x_2) se considerara significativa cuando $|x_1 - x_2| > 2\xi$, donde ξ es el promedio de las incertezas de medición.

Basados en el criterio de equivalencias consideramos insignificativas las diferencias entre los valores obtenidos por ambos metodos en "cilindro". Se puede apreciar que los valores son parecidos entre ambos métodos. (ver Tabla1)

Cabe destacar que como el campo eléctrico es radial los puntos que estén a la misma distancia del origen (igual radio) deberán tener el mismo valor, este es el caso de los puntos B y C.

Según el criterio de equivalencias consideramos insignificativas las diferencias entre los valores para la distribución "cilindro" aunque se puede apreciar que los valores no son parecidos entre ambos métodos. (ver Tabla2)

En este caso el campo eléctrico no es uniforme por lo tanto a una misma distancia de un cilindro no se tiene el mismo valor de campo.

Para la distribución cuadri se aprecia que los valores del campo son altos cerca de cada uno de los cilindros y disminuyen a medida que nos alejamos de ellos. Pero la forma en que disminuye varia dependiendo para que lado nos alejemos. Si nos alejamos de cualquiera de los cilindros hacia el medio el campo disminuirá muy rápidamente mientras que si nos alejamos hacia la parte exterior de la distribución lo hará mas lentamente. También se nota que si nos alejamos de un cilindro en dirección a otro el campo disminuye hasta un valor mínimo local (no absoluto) y luego comienza a subir nuevamente al acercarse al segundo cilindro.

En la distribución rayo lo mas importante a destacar es el valor del campo en las cercanías del para rayo, que tiende a cero. Debido a la modificación en las curvas equipotenciales producida por el para rayo se obtiene zonas de seguridad cerca de este donde el campo eléctrico es casi nulo.

Los resultados obtenidos dejan entrever que si bien los valores son parecidos no son exactamente los mismos en ambos métodos, esto se debe a los errores existentes en cada procedimiento.

Para el caso analítico (ley de coulomb) los errores son las aproximaciones tomados al calcular mediante la dicha ley. Para el caso del programa, las incertezas se deben a la estructura de dicho programa el cual calcula los valores basándose en triángulos formados por nodos. Dependiendo de la cantidad de nodos disponibles los triángulos se harán más pequeños y permitirán un cálculo mas aproximado a la realidad. Lamentablemente la cantidad de nodos es reducida y no permite cálculos con exactitud.

La inexactitud del método numérico (Quickfield) también depende de la densidad de nodos. Si calculamos un valor donde la densidad nodos es menor (y por lo tanto triángulos más grandes) tendremos una peor aproximación. Por eso debemos fijarnos bien donde nos conviene calcular el campo, utilizando puntos donde la densidad de nodos sea mayor. Esto se nota en la primera distribución donde mediante Coulomb el punto B y C son iguales y por medio del programa se obtienen valores diferentes.

La elección de puntos puede ser arbitraria, pero una elección de puntos correcta puede ayudar a la resolución de problemas de una manera más sencilla. En el caso de Quick field para la elección de puntos se debe tener en cuenta la malla de nodos. Nos convendrá elegir puntos donde la densidad de nodos sea alta, o de lo contrario tratar de modificar la malla para que donde yo tengo que calcular la densidad de nodos se alta.

En el caso analítico la elección de puntos sobres los ejes del sistema de referencia nos permitirá simplificar las cuentas en caso de estar trabajando en coordenadas cartesianas (si trabajamos en polares no interesará tanto por que solo nos interesará la dirección radial).

Calculo de promedio de incertezas (ξ) para la distribución “cilindro”:

A	$ x_1 - x_2 = 408$	
B	$ x_1 - x_2 = 397.3$	
C	$ x_1 - x_2 = 13.4$	$2\xi = 472,2$
D	$ x_1 - x_2 = 201$	
E	$ x_1 - x_2 = 160.9$	

Calculo de promedio de incertezas (ξ) para la distribución “distribuido”:

A	$ x_1 - x_2 = 1371.9$	
B	$ x_1 - x_2 = 3087$	
C	$ x_1 - x_2 = 1980$	$2\xi = 4302,5$
D ₁	$ x_1 - x_2 = 1437$	
D ₂	$ x_1 - x_2 = 1295.8$	
E	$ x_1 - x_2 = 3736$	

Se puede apreciar entonces que todos los valores son inferiores al doble del promedio de incertezas, por lo cual las diferencias no son significativas.

Conclusiones

Podemos ver que el vector campo eléctrico es más intenso en las cercanías de las cargas y menos intenso cuando nos alejamos de ellas, esto vale sin importar cual sea la distribución de las cargas en las diferentes configuraciones tomadas; además notamos que las líneas de campo no se cortan por ser un campo de gradientes.

Concluimos también, que las curvas equipotenciales jamás se cortan entre sí y que, por lo dicho antes, son ortogonales a las líneas de campo.

Verificamos que la diferencia de potencial es mayor en las cercanías de las cargas positivas, y menor cerca de las cargas negativas; esto es porque el vector campo eléctrico tiene dirección de las cargas positivas hacia las negativas y sabiendo que el gradiente cambiado de signo indica la dirección de mayor decrecimiento de la función V , entonces deducimos que si nos movemos en la dirección del campo eléctrico nos dirigimos a zonas de menor potencial.

Con relación a las incertezas vimos que en el cálculo de las mismas en su promedio no son significativas tomando el criterio del método utilizado para el cálculo de las mismas.